退化した2変数1階の方程式について (超函数と微分方程式)

三輪, 哲二

数理解析研究所講究録
168巻 1972年 87-92

退化した2変数1階の方程式について

東大理　三輪　哲二

○問題の設定

偏微分作用素の局所可解性に関して，2変数1階の場合に，鈴木[1]は複素領域における特性曲線を使って，次の結果を証明した。

定理 1

$$P = a(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial}{\partial y} + c(x;y)$$

a,b,c は real analytic in Ω

$|a(x,y)| + |b(x,y)| \neq 0$

$k_P(x,y)$ を (x,y) を通る特性曲線（実1次元）が実平面と (x,y) で接触する次数マイナス1，とする。

このとき次は同値

(i) $\forall (x,y) \in \Omega$ $\exists \omega$: (x,y) の近傍　$P\mathcal{B}(\omega) = \mathcal{B}(\omega)$

(ii) $\forall (x,y) \in \Omega$　　$k_P(x,y)$ は偶数 或いは ∞

鈴木[1]における補題1は，鈴木[2]において一般化されたが，ここでは次の形を必要とする。

定理 2

$G \subset \mathbb{C}^2$ を Stein とする。

方程式

$$\frac{\partial}{\partial z}u(z,w)+h(z,w)u(z,w)=f(z,w)$$

が，任意の $h, f \in \mathcal{O}(G)$ に対して，解 $u \in \mathcal{O}(G)$ を持つための必要十分条件は，切り口

$$G(w)=\{z \,/\, (z,w)\in G\}$$

が単連結であり，商空間

$$B=G/\sim \qquad (z,w)\sim(z',w') \Longleftrightarrow$$

$w=w'$ で z と z' は $G(w)$ の同じ連結成分

が Hausdorff になること。

我々は退化した場合のうち，次のような特別な場合を調べる。

$$P=(a_1^1x+a_2^1y)\frac{\partial}{\partial x}+(a_1^2x+a_2^2y)\frac{\partial}{\partial y}$$

$$a_j^i \in \mathbb{R} \quad \det(a_j^i)\neq 0$$

常微分作用素については，佐藤〔1〕で無条件に局所可解性の成り立つ事が示され，小松〔2〕では解空間の次元や解の量的な *singularity* についての深い結果が示された。

さて，$\mathcal{B}$ の *flabbyness* より $P\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)=\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ をいえば，任意の $\omega\subset\mathbb{R}^2$ に対し $P\mathcal{B}(\omega)=\mathcal{B}(\omega)$ である。よって $P\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)=\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ か？ を問題にする。

実座標変換により次の標準形を得る。

i) $(\mu x-\nu y)\dfrac{\partial}{\partial x}+(\nu x+\mu y)\dfrac{\partial}{\partial y}$ $(\nu\neq 0)$

　① $\mu=0$ 渦心点

　② $\mu\neq 0$ 渦状点

ii) $\lambda x\dfrac{\partial}{\partial x}\pm y\dfrac{\partial}{\partial y}$ $(0<\lambda\leqq 1)$

　① $+$ 結節点

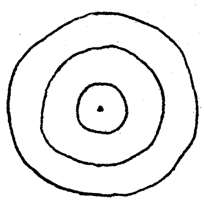
　② $-$ 鞍形点

iii) $(x+y)\dfrac{\partial}{\partial x}+y\dfrac{\partial}{\partial y}$ 退化結節点

実特性曲線の描く図は，対応する２階の自律系の解軌道として得られる。（ポントリャーギン〔1〕）

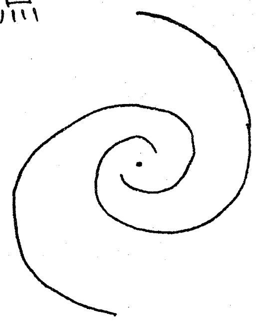
さん

渦心点

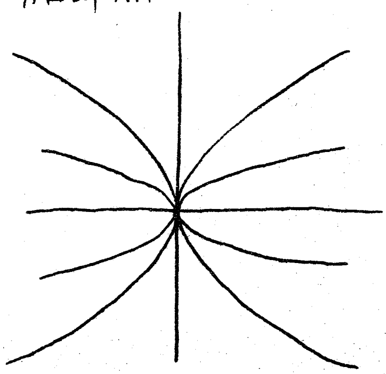


$$x^2+y^2=\mathrm{const}$$

渦状点

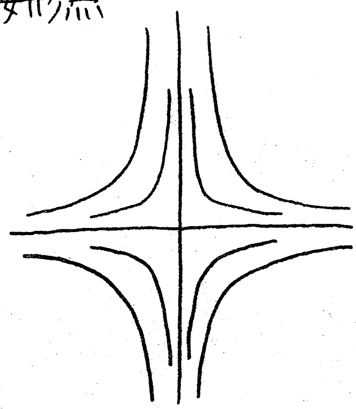


結節点



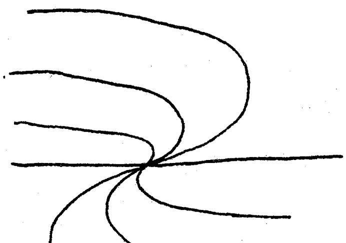
$$\frac{y^\lambda}{x}=\mathrm{const}$$

鞍形点



$$xy^\lambda=\mathrm{const}$$

退化結節点



$$\log y-\frac{x}{y}=\mathrm{const}$$

しい

このうち渦心点については，特性曲線に閉軌道が現われるため，可解性の成り立たないことは明らか。（佐藤先生に依る。）他の場合，可解性の成り立つ事を以下順次示そう。

渦状点

$\mathcal{B}$の flabbyness と特性曲線の形状から

$P\mathcal{B}_0=\mathcal{B}_0$　$\mathcal{B}_0$は原点に support を持つ超函数をいえばよい。すなわち任意の local operator J_1 に対し，local operator J_2 があって

$PJ_2\delta=J_1\delta$　となる事を示せばよいが，これは行列の計算に過ぎない。

結節点，鞍形点，退化結節点

鈴木［1］の方法に従えばよい。すなわち小松［1］にあるように

$$V_1=\{(z,w)\in\mathbb{C}^2 / \operatorname{Im} z\neq 0\}$$

$$V_2=\{(z,w)\in\mathbb{C}^2 / \operatorname{Im} w\neq 0\}$$

$$V^{(\sigma)}=\{(z,w)\in\mathbb{C}^2 / (\operatorname{Im} z, \operatorname{Im} w)\text{が第}\sigma\text{象限}\}$$

$$\sigma=1,2,3,4$$

とおけば

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{O}(V_1 \cap V_2) / (\mathcal{O}(V_1) + \mathcal{O}(V_2))$$

である。よって$\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$で方程式が解けるためには，各$V^{(6)}$でPを複素変数に拡張した方程式が解ければ十分である。（必要とはならない事に注意。）そこで定理 2. によって$V^{(6)}$の複素特性曲線（実2次元）による切り口を調べればよい事がわかる。ところが我々は特性曲線を与える具体的な式を知っているから計算が可能である。

小松〔1〕　佐藤の超函数と定数係数線型偏微分方程式
東大セミナリー・ノート　22

小松〔2〕　常微分作用素について
'71　3月　数理研シンポジウム

ポントリャーギン〔1〕　常微分方程式　　共立出版

佐藤〔1〕　*Theory of Hyperfunctions* (I)

鈴木〔1〕　変数係数偏微分方程式の解の存在と解析性
数理科学講究録　108

鈴木〔2〕　今回のシンポジウムにおける講演